

Skupovi

Neki posebni skupovi

Simbol \mathbb{N} (čitamo: debelo N) označava skup prirodnih brojeva
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Simbol \mathbb{Z}^+ (čitamo: debelo čet plus) označava skup pozitivnih cijelih
 $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Simbol \mathbb{Z} označava skup cijelih brojeva (pozitivni, nula i negativni brojevi)
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Brojeve oblika $\frac{m}{n}$ gdje je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ i $n \neq 0$ zovemo racionalni brojevi. Skup svih racionalnih brojeva označavamo sa \mathbb{Q} (čitamo: debelo kju).

⊕) Ispisati po pet elemenata koji se nalaze u svakom od sljedećih skupova

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je djeljiv sa } 5\}$

b) $\{2^{n+1} \mid n \in \mathbb{P}\}$

c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

d) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{P}\}$

f) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < 1\}$

g) $\{n \in \mathbb{N} \mid n+1 \text{ je prost}\}$

\mathbb{P} skup prostih brojeva, 1 nije prost

k) a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je djeljiv sa } 5\}$

5, 50, 75, 100, 10 000 pet elemenata iz skupa

b) $\{2^{n+1} \mid n \in \mathbb{P}\}$

\mathbb{P} označava skup prostih brojeva.

Za proste brojeve 2, 3, 5, 7, 107 imamo

5, 7, 11, 15, 215 pet elemenata iz skupa

c) $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{S \mid S \subseteq A\}$ partitivni skup

$\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$, $\{1\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
pet elemenata iz skupa

d) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 2, 4, 8, 256, $\frac{65536}{(za\ n=16)}$ pet elemenata

e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{P}\}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{113}$, $\frac{1}{317}$, $\frac{1}{503}$ pet elemenata iz skupa

f) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < 1\}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{1}{20}$ pet elemenata

g) $\{n \in \mathbb{N} \mid n+1 \text{ je prost}\}$ 1, 2, 4, 16, 22, 42 šest elemenata

#) Ispisati sve elemente iz sledećih skupova

a) $\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,4\}$

b) $\{n^2 - n \mid n=0,1,2,3,4\}$

c) $\{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{P}, n \text{ je parno i } n < 11\}$, \mathbb{P} skup prostih brojeva, 1 nije prost broj

d) $\{2 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rj. a) $\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,4\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

b) $\{n^2 - n \mid n=0,1,2,3,4\} = \{0, 2, 6, 12\}$

c) $\{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{P}, n \text{ je parno i } n < 11\} = \{\frac{1}{4}\}$

d) $\{2 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3\}$

#) Ispisati po pet elemenata iz svakog datog skupa.

a) Σ^* gdje je $\Sigma = \{a, b, c\}$

b) $\{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \leq 2\}$ gdje je $\Sigma = \{a, b\}$

c) $\{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) = 4\}$ gdje je $\Sigma = \{a, b\}$

Koji od skupova iznad sadrži praznu riječ λ .

Rj. $\left[\begin{array}{l} \text{skup } \Sigma \text{ zovemo alfabet} \\ \text{riječ je konačan niz slova iz } \Sigma \\ \Sigma^* \text{ je skup svih riječi koje koriste slova iz } \Sigma \end{array} \right]$

a) aab, abcc, cbabc, ccaabbca, a

b) aa, b, ab, ba, bb

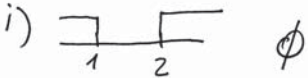
c) aabb, aaaa, baba, bbaa, bbb a

prazna riječ je riječ bez slova i označavamo je sa λ ili ϵ

$\lambda \in \Sigma^*$ i $\lambda \in \{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \leq 2\}$

Odrediti sljedeće skupove, tj. ispisati njihove elemente ako su neprazni i napisati \emptyset ako su prazni.

- Rj. a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\}$ g) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 3\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$ h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\}$
 c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 8\}$ i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ i } x \geq 2\}$
 d) $\{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n < 7\}$ j) $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } n \leq 6\}$
 e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$ k) $\{n \in \mathbb{P} \mid n \leq 15\}$
 f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ \mathbb{P} skup prostih brojeva
 1 nije prost broj

- Rj. a) 3 g) \emptyset
 b) -3, 3 h) \emptyset
 c) -3, 3 i)  \emptyset
 d) 4, 5, 6 j) 4, 7, 10, 13, 16, 19
 e) -6, -5, -4, 4, 5, 6 k) $\{n \in \mathbb{P} \mid n \leq 15\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 f) \emptyset

Ispisati elemente sljedećih skupova ako su neprazni i napisati \emptyset ako su prazni.

- a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 12\}$ c) $\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\}$
 b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 1 = 0\}$ d) $\{n \in \mathbb{N} \mid \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\}$

Rj. a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 12\}$ svi prirodni brojevi koji dijele 12
 to su 1, 2, 3, 4, 6, 12

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\}$

Za realan broj k , $\lfloor k \rfloor$ označava najveći cio broj koji nije veći od k

$$\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = \lfloor 1,33 \rfloor = 1$$

$$\lfloor \frac{26}{3} \rfloor = \lfloor 8,66 \rfloor = 8$$

$$\lfloor \frac{23}{3} \rfloor = \lfloor 7,66 \rfloor = 7$$

$$\lfloor \frac{24}{3} \rfloor = \lfloor 8 \rfloor = 8$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\} = \{24, 25, 26\}$$

d) $\{n \in \mathbb{N} \mid \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\}$

Za $k \in \mathbb{R}$ $\lceil k \rceil$ označava najmanji cio broj koji nije manji od k

$$\lceil \frac{9}{2} \rceil = \lceil 4,5 \rceil = 5$$

$$\lceil \frac{15}{2} \rceil = \lceil 7,5 \rceil = 8$$

$$\lceil \frac{17}{2} \rceil = \lceil 8,5 \rceil = 9$$

$$\lceil \frac{14}{2} \rceil = \lceil 7 \rceil = 7$$

$$\lceil \frac{16}{2} \rceil = \lceil 8 \rceil = 8$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\} = \{15, 16\}$$

Neka je $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Odrediti sljedeće skupove, tj. ispisati njihove elemente ako su neprazni, i napisati \emptyset ako su prazni.

- a) $\{n \in A : 4|n\}$ c) $\{n \in A : \max\{n, 4\} = 4\}$
 b) $\{n \in A : n|4\}$ d) $\{n \in A : \max\{n, 14\} = n\}$

Rj.
 $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 18, 19, 20\}$

a) $4|n$ - čitamo: 4 djeli n
 $\{n \in A : 4|n\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

b) $n|4$ - čitamo: n djeli 4
 $\{n \in A : n|4\} = \{1, 2, 4\}$

c) $\max\{n, 4\}$ - čitamo: najvedi broj između n i 4
 $\{n \in A : \max\{n, 4\} = 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

d) $\{n \in A : \max\{n, 14\} = n\} = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Koliko elemenata imaju sljedeći skupovi?

Napišite \emptyset ako je skup beskonačan.

- a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2\}$
 b) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\}$
 c) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$
 d) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 < n < 73\}$
 e) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ je paran i } |n| \leq 73\}$
 f) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 73\}$
 g) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$
 h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$

Rj.
 a) 0 elemenata
 b) 74 elementa (0 + svi brojevi od 1 do 73)
 c) $1 \leq n \leq 73$ - ima 73 elementa $\Rightarrow 5 \leq n \leq 73$ ima 69 elementa
 $5 \leq -n \leq 73$ ima 69 elementa
 $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$ ima $2 \cdot 69 = 138$ elementa

d) 68 elementa

e) $n \leq 72$ ^{in parno} ima 36 elementa $\Rightarrow n \leq 73$ ^{in parno} ima 36 elementa
 $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ je parno i } |n| \leq 73\}$ ima $2 \cdot 36 = 72$ elementa

f) \emptyset mnogo elemenata (između svaka dva racionalna broja postoji racionalan broj, ZARTO? DOKAZATI?)

g) 0 elemenata

h) 2 elementa ($-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$).

#) Koliko elemenata imaju sljedeći skupovi? (Napišite ∞ ako je skup beskonačan).

- $\{x \in \mathbb{R} : 0,99 < x < 1,00\}$
- $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ je paran broj}\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je prost}\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je paran i prost}\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je paran ili prost}\}$

Rj. a) $0,99 = \frac{99}{100} = \frac{99 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{198}{200} < \frac{199}{200} = 0,995 < 1,00$

Između svaka dva realna broja postoji realan broj.
(ZAŠTO? DOKAZATI?)

$\{x \in \mathbb{R} : 0,99 < x < 1,00\}$ ima ∞ mnogo elemenata

b) $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{S \mid S \subseteq A\}$

0	1	2	3
□	□	□	□
01	01	01	01

$\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ ima 2^4 elemenata (16 elemenata) ZAŠTO?

- ∞ mnogo elemenata
- ∞ mnogo elemenata (2, 4, 6, 8, ...)
- ∞ mnogo elemenata (3, 3, 5, 7, ...)
- 1 element (ZAŠTO?)
- ∞ mnogo elemenata (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, ...)

#) Posmatrajmo sljedeća tri alfabeta: $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$,
 $\Sigma_2 = \{a, b, ca\}$; $\Sigma_3 = \{a, b, Ab\}$. Odrediti u
 koji od Σ_1^* , Σ_2^* i Σ_3^* svaka ^{dole} data riječ pripada,
 i odrediti njihove dužine kao članove svakog skupa
 kojem pripada.

- | | | |
|--------|--------|---------|
| a) aba | b) cba | e) caab |
| d) bAb | e) cab | f) baAb |

Rj. Σ je dati alfabet.
 riječ je konačan niz slova ^{iz Σ} napisanih jedno pored drugoy
 skup svih riječi koja koriste slova iz Σ označavamo sa Σ^*
 (čitamo: sigma zvijezda)
 svaki podsкуп od Σ^* zovemo jezik nad Σ

- aba pripada u sve tri skupa Σ_1^* , Σ_2^* i Σ_3^* .
dužina ove riječi je 3 u sve tri slučaja
- cba
ovu riječ možemo dobiti samo iz Σ_1^* .
dužina ove riječi je 3.
- caab - ovu riječ možemo dobiti iz Σ_1^* i Σ_2^*
kao član Σ_1^* dužina ove riječi je 4
kao član Σ_2^* dužina ove riječi je 3
- bAb - je riječ iz Σ_2^* , dužina ove riječi je 2
- cab - je riječ iz Σ_1^* i Σ_2^* . Za Σ_1^* dužina je 3 dok za Σ_2^* dužina je 2
- baAb - je riječ iz Σ_3^* . Dužina riječi je 3.

Zadaci za vježbu

1. Koliko elemenata ima u sledećim skupovima? Napišite
i ako je skup beskonačan.

a) $\{-1, 1\}$

d) $\{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 1\}$

b) $[-1, 1]$

e) Σ^* gdje je $\Sigma = \{a, b, c\}$

c) $(-1, 1)$

f) $\{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \leq 4\}$ gdje je
 $\Sigma = \{a, b, c\}$.

2. Posmatrajmo skupove

$A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je neparno}\}$

$B = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je prost}\}$

$C = \{4n+3 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

Diskutovati koji od
ovih skupova je
podskup od kojeg.
Razmotriti svih 16
mogućnosti (npr. da
li je $A \subseteq B$).

3. Posmatrajmo skupove $\{0, 1\}$, $(0, 1)$ i $[0, 1]$. Odgovoriti da ^{NETAČNO} TAČNO ili!

a) $\{0, 1\} \subseteq (0, 1)$

d) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$

g) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $\{0, 1\}$

b) $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$

e) $[0, 1] \subseteq \mathbb{Z}$

h) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $(0, 1)$

c) $(0, 1) \subseteq [0, 1]$

f) $[0, 1] \subseteq \emptyset$

i) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $[0, 1]$

4. Pretpostavimo da je w neprazna riječ u Σ^* .

a) ako prvo (tj. lijevo-krajnje) slovo od w izbrišemo, da li je
dobijeni niz slova iz Σ^* .

b) šta je u slučaju da izbrišemo slova sa oba kraja od w ?
Da li su dobijeni nizovi iz Σ^* .

c) ako bi imali uređaj koji bi mogao prepoznati slova iz
 Σ i mogao izbrišati slova iz riječi, na koji način bi
moгли koristiti taj uređaj da odredimo da li je proizvoljan niz simbola iz Σ^* ?